

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»  
Институт математики, физики и информационных технологий  
Кафедра математического моделирования и информационных технологий

УТВЕРЖДАЮ:  
Директор института



Н. Я. Королева  
«05» июля 2021 г.

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА**

по дисциплине Б1.В.ДВ.04.2 Вариационное исчисление

Направление подготовки/специальность: 01.03.02 - Прикладная математика и информатика

Профиль/направленность/специализация: Математическое и компьютерное моделирование

Уровень высшего образования: бакалавриат

Квалификация: Бакалавр

год набора: 2020

**Автор программы:**

Кандидат технических наук, Соловьев Денис Сергеевич

Рабочая программа составлена в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.02 - Прикладная математика и информатика (уровень бакалавриата) (приказ Министерства образования и науки РФ от «10» января 2018 г. № 9).

Рабочая программа принята на заседании Кафедры математического моделирования и информационных технологий «18» мая 2021 г. Протокол № 9

Рассмотрена и одобрена на заседании Ученого совета Института математики, физики и информационных технологий, Протокол от «05» июля 2021 г. № 5.

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Цели и задачи дисциплины.....	4
2. Место дисциплины в структуре ОП бакалавра.....	5
3. Объем и содержание дисциплины.....	5
4. Контроль знаний обучающихся и типовые оценочные средства.....	7
5. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля).....	22
6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины.....	24
7. Материально-техническое обеспечение дисциплины, программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы.....	24

## 1. Цели и задачи дисциплины

### 1.1 Цель дисциплины – формирование компетенций:

ПК-7 Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат

### 1.2 Типы задач профессиональной деятельности, к которым готовятся обучающиеся в рамках освоения дисциплины:

- научно-исследовательский

1.3 Дисциплина ориентирована на подготовку обучающихся к профессиональной деятельности в сферах: 01 Образование и наука (в сфере общего, профессионального и дополнительного профессионального образования; в сфере научных исследований), 06 Связь, информационные и коммуникационные технологии (в сфере проектирования, разработки, внедрения и эксплуатации информационных систем, управления их жизненным циклом), 40 Сквозные виды профессиональной деятельности в промышленности (в сфере научно-исследовательских и опытноконструкторских разработок; в сфере разработки автоматизированных систем управления технологическими процессами производства)

### 1.4 В результате освоения дисциплины у обучающихся должны быть сформированы:

Обобщенные трудовые функции / трудовые функции / трудовые или профессиональные действия (при наличии профстандарта)	Код и наименование компетенции ФГОС ВО, необходимой для формирования трудового или профессионального действия	Индикаторы достижения компетенций
	ПК-7 Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	Совершенствует современный математический аппарат

### 1.5 Согласование междисциплинарных связей дисциплин, обеспечивающих освоение компетенций:

ПК-7 Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат

№ п/п	Наименование дисциплин, определяющих междисциплинарные связи	Форма обучения		
		Очная (семестр)		
		3	7	8
1	Математические модели социально-экономических процессов	+		
2	Моделирование в естественных науках			+
3	Научно-исследовательская работа (получение первичных навыков научно-исследовательской работы)		+	
4	Преддипломная практика			+

5	Уравнения математической физики		+	
---	---------------------------------------	--	---	--

## 2. Место дисциплины в структуре ОП бакалавриата:

Дисциплина «Вариационное исчисление» относится к части, формируемой участниками образовательных отношений, учебного плана ОП по направлению подготовки 01.03.02 - Прикладная математика и информатика.

Дисциплина «Вариационное исчисление» изучается в 7 семестре.

## 3. Объем и содержание дисциплины

3.1. Объем дисциплины: 9 з.е.

Очная: 9 з.е.

Вид учебной работы	Очная (всего часов)
<b>Общая трудоёмкость дисциплины</b>	<b>324</b>
Контактная работа	144
Лекции (Лекции)	48
Практические (Практ. раб.)	96
Самостоятельная работа (СР)	144
Экзамен	36

## 3.2. Содержание курса:

№ темы	Название раздела/темы	Вид учебной работы, час.			Формы текущего контроля
		Лек ции	Пра кт. раб.	СР	
		О	О	О	
7 семестр					
1	Экстремальные задачи: история вопроса; основные понятия; принцип Лагранжа в теории экстремальных задач	10	18	28	Тестирование; Вопросы для самоподготовки / Практическая работа
2	Элементы функционального анализа и дифференциального исчисления	10	20	30	Вопросы для самоподготовки / Практическая работа
3	Гладкие конечномерные задачи	10	18	28	Тестирование; Вопросы для самоподготовки / Практическая работа
4	Классическое вариационное исчисление	10	18	29	Вопросы для самоподготовки / Практическая работа

5	Задача Лагранжа и оптимальное управление	12	18	29	Тестирование; Вопросы для самоподготовки / Практическая работа
---	--	----	----	----	--

## **Тема 1. Экстремальные задачи: история вопроса; основные понятия; принцип Лагранжа в теории экстремальных задач (ПК-7)**

### **Лекция.**

Общая постановка экстремальной задачи. Примеры экстремальных задач (задача Дидоны, задача о брахистохроне, задача о геодезических), формализация. Основные разделы ТЭЗ. Основные понятия ТЭЗ, общая терминология: задачи на условный и безусловный экстремумы, целевые функционалы, допустимые точки (экстремали), локальные и глобальные экстремумы. Основные принципы решения экстремальных задач, необходимые и достаточные условия экстремума. Принцип Лагранжа: сведение задач с ограничениями к задачам без ограничений.

### **Практическое занятие.**

Найти экстремаль функционала согласно варианта. Исследовать полученную экстремаль на достаточные условия экстремума. Построить график решения.

### **Задания для самостоятельной работы.**

1. Доказать, что нормы и эквивалентны.
2. Доказать, что все конечномерные нормированные пространства банаховы.
3. Построить пример нормированного, но не банахова пространства.
4. Привести пример двумерного подпространства  $C([0, 1])$ , единичным шаром которого является единичный круг.
5. Пусть  $X = \mathbb{R}^2$ . Найти норму пространства, сопряженного  $(X, \|\cdot\|)$ , если норма в  $X$  задается соотношениями:
  - а) ; б)
6. Привести пример ограниченного замкнутого множества, не являющегося компактом.
7. Исследовать отображения на дифференцируемость по Фреше и найти производные в случае дифференцируемости.
  - а) матрица размерности
  - в)  $H$ , где  $H$  - гильбертово пространство;
  - г) где  $H$  - гильбертово пространство;

## **Тема 2. Элементы функционального анализа и дифференциального исчисления (ПК-7)**

### **Лекция.**

Нормированные и банаховы пространства. Сопряженное пространство и сопряженный оператор. Теорема Вейерштрасса и ее обобщение. Теоремы об отделимости. Производная по направлению, вариация по Лагранжу, производные по Гато и Фреше. Строгая дифференцируемость. Производные высших порядков. Основные теоремы дифференциального исчисления в нормированных пространствах (теорема о суперпозиции, формула Тейлора, теоремы об обратной и неявной функциях).

### **Практическое занятие.**

Найти экстремаль функционала, зависящего от двух функций, при заданных граничных условиях согласно варианта, и построить график экстремали в виде двух функций  $y(x)$ ,  $z(x)$  и в виде пространственной кривой.

### **Задания для самостоятельной работы.**

Подготовка конспекта лекций и лабораторных работ, прочтение дополнительной литературы

## **Тема 3. Гладкие конечномерные задачи (ПК-7)**

### **Лекция.**

Конечномерные задачи без ограничений: постановка, правило решения, теорема Ферма. Условия второго порядка. Гладкая конечномерная задача с ограничениями в виде равенств: постановка, правило решения. Необходимое условие экстремума первого порядка – принцип Лагранжа. Необходимое и достаточное условия второго порядка. Гладкая конечномерная задача с равенствами и неравенствами: постановка, правило решения. Необходимое условие первого порядка, необходимое и достаточное условия второго порядка. Применение теоремы Вейерштрасса и следствия из нее.

#### **Практическое занятие.**

Найти экстремаль функционала, зависящего от производных высшего порядка, согласно варианта при заданных граничных условиях.

#### **Задания для самостоятельной работы.**

Подготовка конспекта лекций и лабораторных работ, прочтение дополнительной литературы

### **Тема 4. Классическое вариационное исчисление (ПК-7)**

#### **Лекция.**

Задачи на отыскание слабого экстремума. Простейшая задача вариационного исчисления: постановка, правило решения, необходимое условие слабого экстремума первого порядка. Леммы Лагранжа и Дюбуа-Реймона. Уравнение Эйлера и его частные случаи. Функционалы, зависящие от производных высших порядков, векторная задача. Задача Больца: постановка, правило решения, необходимое условие слабого экстремума первого порядка. Задачи с подвижными концами и границами: постановка, правило решения. Изопериметрическая задача: постановка, правило решения, необходимое условие первого порядка. Условия второго порядка в задачах вариационного исчисления: условия Лежандра и Якоби. Сильные локальные экстремумы. Необходимые и достаточные условия сильного локального экстремума в простейшей задаче.

#### **Практическое занятие.**

- 1) Найти экстремаль функционала, зависящего от функции нескольких переменных, согласно варианта.
- 2) Для своего варианта заданий 1а и 2 найти экстремали, если граничные условия на правом конце не заданы. Сравнить полученные решения с решениями примеров 1а и 2.

#### **Задания для самостоятельной работы.**

Подготовка конспекта лекций и лабораторных работ, прочтение дополнительной литературы

### **Тема 5. Задача Лагранжа и оптимальное управление (ПК-7)**

#### **Лекция.**

Задача Лагранжа: постановка, правило решения, необходимые условия экстремума. Элементарная задача оптимального управления: постановка, правило решения, необходимое и достаточное условие. Задача оптимального управления в форме Понтрягина: постановка, правило решения. Необходимые условия экстремума (принцип максимума Понтрягина). Доказательство принципа максимума в задаче со свободным концом. Необходимые условия минимума в вариационном исчислении и принцип максимума.

#### **Практическое занятие.**

- 1) Для функционала 1а найти экстремаль, при условии, что правый конец движется по заданной линии.
- 2) Для функционала 2 найти экстремаль, при условии, что правый конец движется по заданной поверхности.

#### **Задания для самостоятельной работы.**

Подготовка конспекта лекций и лабораторных работ, прочтение дополнительной литературы

### **4. Контроль знаний обучающихся и типовые оценочные средства**

#### **4.1. Распределение баллов:**

- посещаемость – 10 баллов
- текущий контроль – 30 баллов
- контрольные срезы – 3 среза по 10 баллов каждый
- премиальные баллы – 20 баллов
- ответ на экзамене: не более 30 баллов

Распределение баллов по заданиям:

№ те мы	Название темы / вид учебной работы	Формы текущего контроля / срезы	Мах. кол-во баллов	Методика проведения занятия и оценки
1.	Экстремальные задачи: история вопроса; основные понятия; принцип Лагранжа в теории экстремальных задач	<b>Тестирование(контрольный срез)</b>	10	Тестирование подразумевает 10 вопросов. За прохождение тестирования выставляются следующие баллы: - 90 % - 10 баллов; - 65 % - 5 баллов; - 50 % - 2 балла; - менее 50 % - балл не начисляется.
		Вопросы для самоподготовки / Практическая работа	6	Методика оценки самоподготовки студентов. 3 балла ставится тогда, когда: • Студент свободно применяет знания на практике; • Не допускает ошибок в воспроизведении изученного материала; • Студент выделяет главные положения в изученном материале и не затрудняется в ответах на видоизмененные вопросы; • Студент усваивает весь объем программного материала. 2 балла ставятся тогда, когда: • Студент знает весь изученный материал; • Отвечает без особых затруднений на вопросы преподавателя; • Студент умеет применять полученные знания на практике; • В условных ответах не допускает серьезных ошибок, легко устраняет определенные неточности с помощью дополнительных вопросов преподавателя. 1 балл ставится тогда, когда: • Студент обнаруживает освоение основного материала, но испытывает затруднения при его самостоятельном воспроизведении и требует дополнительных дополняющих вопросов преподавателя; • Предпочитает отвечать на вопросы воспроизводящего характера и испытывает затруднения при ответах на воспроизводящие вопросы. Балл не начисляется тогда, когда: • У студента имеются отдельные представления об изучаемом материале, но все, же большая часть не усвоена. Основными критериями оценки выполненной студентом и представленной для проверки работы являются: 1. Степень соответствия выполненного задания поставленным требованиям; 2. Структурирование и комментирование лабораторной работы; 3. Уникальность выполнение работы (отличие от работ коллег); 4. Успешные ответы на контрольные вопросы. «3 балла» - оформление соответствует требованиям, критерии выдержаны, защита всего перечня контрольных вопросов. «2 балла» - оформление соответствует требованиям, критерии выдержаны, защита только 80 % контрольных вопросов. «1 балл» - оформление соответствует требованиям, критерии выдержаны, защита только 61 % контрольных вопросов. Балл не начисляется, если оформление не соответствует требованиям, критерии не выдержаны, защита менее 61 % контрольных вопросов.

2.	Элементы функционального анализа и дифференциального исчисления	Вопросы для самоподготовки / Практическая работа	6	<p>Методика оценки самоподготовки студентов.</p> <p>3 балла ставится тогда, когда:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Студент свободно применяет знания на практике;</li> <li>• Не допускает ошибок в воспроизведении изученного материала;</li> <li>• Студент выделяет главные положения в изученном материале и не затрудняется в ответах на видоизмененные вопросы;</li> <li>• Студент усваивает весь объем программного материала.</li> </ul> <p>2 балла ставятся тогда, когда:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Студент знает весь изученный материал;</li> <li>• Отвечает без особых затруднений на вопросы преподавателя;</li> <li>• Студент умеет применять полученные знания на практике;</li> <li>• В условных ответах не допускает серьезных ошибок, легко устраняет определенные неточности с помощью дополнительных вопросов преподавателя.</li> </ul> <p>1 балл ставится тогда, когда:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Студент обнаруживает освоение основного материала, но испытывает затруднения при его самостоятельном воспроизведении и требует дополнительных дополняющих вопросов преподавателя;</li> <li>• Предпочитает отвечать на вопросы воспроизводящего характера и испытывает затруднения при ответах на воспроизводящие вопросы.</li> </ul> <p>Балл не начисляется тогда, когда:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• У студента имеются отдельные представления об изучаемом материале, но все, же большая часть не усвоена.</li> </ul> <p>Основными критериями оценки выполненной студентом и представленной для проверки работы являются:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Степень соответствия выполненного задания поставленным требованиям;</li> <li>2. Структурирование и комментирование лабораторной работы;</li> <li>3. Уникальность выполнения работы (отличие от работ коллег);</li> <li>4. Успешные ответы на контрольные вопросы.</li> </ol> <p>«3 балла» - оформление соответствует требованиям, критерии выдержаны, защита всего перечня контрольных вопросов.</p> <p>«2 балла» - оформление соответствует требованиям, критерии выдержаны, защита только 80 % контрольных вопросов.</p> <p>«1 балл» - оформление соответствует требованиям, критерии выдержаны, защита только 61 % контрольных вопросов.</p> <p>Балл не начисляется, если оформление не соответствует требованиям, критерии не выдержаны, защита менее 61 % контрольных вопросов.</p>
3.	Гладкие конечномерные задачи	<b>Тестирование(контрольный срез)</b>	10	<p>Тестирование подразумевает 10 вопросов. За прохождение тестирования выставляются следующие баллы:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- 90 % - 10 баллов;</li> <li>- 65 % - 5 баллов;</li> <li>- 50 % - 2 балла;</li> <li>- менее 50 % - балл не начисляется.</li> </ul>

		<p>Вопросы для самоподготовки / Практическая работа</p>	<p>6</p>	<p>Методика оценки самоподготовки студентов.</p> <p>3 балла ставится тогда, когда:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Студент свободно применяет знания на практике;</li> <li>• Не допускает ошибок в воспроизведении изученного материала;</li> <li>• Студент выделяет главные положения в изученном материале и не затрудняется в ответах на видоизмененные вопросы;</li> <li>• Студент усваивает весь объем программного материала.</li> </ul> <p>2 балла ставятся тогда, когда:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Студент знает весь изученный материал;</li> <li>• Отвечает без особых затруднений на вопросы преподавателя;</li> <li>• Студент умеет применять полученные знания на практике;</li> <li>• В условных ответах не допускает серьезных ошибок, легко устраняет определенные неточности с помощью дополнительных вопросов преподавателя.</li> </ul> <p>1 балл ставится тогда, когда:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Студент обнаруживает освоение основного материала, но испытывает затруднения при его самостоятельном воспроизведении и требует дополнительных дополняющих вопросов преподавателя;</li> <li>• Предпочитает отвечать на вопросы воспроизводящего характера и испытывает затруднения при ответах на воспроизводящие вопросы.</li> </ul> <p>Балл не начисляется тогда, когда:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• У студента имеются отдельные представления об изучаемом материале, но все, же большая часть не усвоена.</li> </ul> <p>Основными критериями оценки выполненной студентом и представленной для проверки работы являются:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Степень соответствия выполненного задания поставленным требованиям;</li> <li>2. Структурирование и комментирование лабораторной работы;</li> <li>3. Уникальность выполнения работы (отличие от работ коллег);</li> <li>4. Успешные ответы на контрольные вопросы.</li> </ol> <p>«3 балла» - оформление соответствует требованиям, критерии выдержаны, защита всего перечня контрольных вопросов.</p> <p>«2 балла» - оформление соответствует требованиям, критерии выдержаны, защита только 80 % контрольных вопросов.</p> <p>«1 балл» - оформление соответствует требованиям, критерии выдержаны, защита только 61 % контрольных вопросов.</p> <p>Балл не начисляется, если оформление не соответствует требованиям, критерии не выдержаны, защита менее 61 % контрольных вопросов.</p>
--	--	---	----------	--

4.	Классическое вариационное исчисление	Вопросы для самоподготовки / Практическая работа	6	<p>Методика оценки самоподготовки студентов.</p> <p>3 балла ставится тогда, когда:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Студент свободно применяет знания на практике;</li> <li>• Не допускает ошибок в воспроизведении изученного материала;</li> <li>• Студент выделяет главные положения в изученном материале и не затрудняется в ответах на видоизмененные вопросы;</li> <li>• Студент усваивает весь объем программного материала.</li> </ul> <p>2 балла ставятся тогда, когда:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Студент знает весь изученный материал;</li> <li>• Отвечает без особых затруднений на вопросы преподавателя;</li> <li>• Студент умеет применять полученные знания на практике;</li> <li>• В условных ответах не допускает серьезных ошибок, легко устраняет определенные неточности с помощью дополнительных вопросов преподавателя.</li> </ul> <p>1 балл ставится тогда, когда:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Студент обнаруживает освоение основного материала, но испытывает затруднения при его самостоятельном воспроизведении и требует дополнительных дополняющих вопросов преподавателя;</li> <li>• Предпочитает отвечать на вопросы воспроизводящего характера и испытывает затруднения при ответах на воспроизводящие вопросы.</li> </ul> <p>Балл не начисляется тогда, когда:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• У студента имеются отдельные представления об изучаемом материале, но все, же большая часть не усвоена.</li> </ul> <p>Основными критериями оценки выполненной студентом и представленной для проверки работы являются:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Степень соответствия выполненного задания поставленным требованиям;</li> <li>2. Структурирование и комментирование лабораторной работы;</li> <li>3. Уникальность выполнения работы (отличие от работ коллег);</li> <li>4. Успешные ответы на контрольные вопросы.</li> </ol> <p>«3 балла» - оформление соответствует требованиям, критерии выдержаны, защита всего перечня контрольных вопросов.</p> <p>«2 балла» - оформление соответствует требованиям, критерии выдержаны, защита только 80 % контрольных вопросов.</p> <p>«1 балл» - оформление соответствует требованиям, критерии выдержаны, защита только 61 % контрольных вопросов.</p> <p>Балл не начисляется, если оформление не соответствует требованиям, критерии не выдержаны, защита менее 61 % контрольных вопросов.</p>
5.	Задача Лагранжа и оптимальное управление	Тестирование(контрольный срез)	10	<p>Тестирование подразумевает 10 вопросов. За прохождение тестирования выставляются следующие баллы:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- 90 % - 10 баллов;</li> <li>- 65 % - 5 баллов;</li> <li>- 50 % - 2 балла;</li> <li>- менее 50 % - балл не начисляется.</li> </ul>

		Вопросы для самоподготовки / Практическая работа	6	<p>Методика оценки самоподготовки студентов.</p> <p>3 балла ставится тогда, когда:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Студент свободно применяет знания на практике;</li> <li>• Не допускает ошибок в воспроизведении изученного материала;</li> <li>• Студент выделяет главные положения в изученном материале и не затрудняется в ответах на видоизмененные вопросы;</li> <li>• Студент усваивает весь объем программного материала.</li> </ul> <p>2 балла ставятся тогда, когда:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Студент знает весь изученный материал;</li> <li>• Отвечает без особых затруднений на вопросы преподавателя;</li> <li>• Студент умеет применять полученные знания на практике;</li> <li>• В условных ответах не допускает серьезных ошибок, легко устраняет определенные неточности с помощью дополнительных вопросов преподавателя.</li> </ul> <p>1 балл ставится тогда, когда:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Студент обнаруживает освоение основного материала, но испытывает затруднения при его самостоятельном воспроизведении и требует дополнительных дополняющих вопросов преподавателя;</li> <li>• Предпочитает отвечать на вопросы воспроизводящего характера и испытывает затруднения при ответах на воспроизводящие вопросы.</li> </ul> <p>Балл не начисляется тогда, когда:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• У студента имеются отдельные представления об изучаемом материале, но все, же большая часть не усвоена.</li> </ul> <p>Основными критериями оценки выполненной студентом и представленной для проверки работы являются:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Степень соответствия выполненного задания поставленным требованиям;</li> <li>2. Структурирование и комментирование лабораторной работы;</li> <li>3. Уникальность выполнения работы (отличие от работ коллег);</li> <li>4. Успешные ответы на контрольные вопросы.</li> </ol> <p>«3 балла» - оформление соответствует требованиям, критерии выдержаны, защита всего перечня контрольных вопросов.</p> <p>«2 балла» - оформление соответствует требованиям, критерии выдержаны, защита только 80 % контрольных вопросов.</p> <p>«1 балл» - оформление соответствует требованиям, критерии выдержаны, защита только 61 % контрольных вопросов.</p> <p>Балл не начисляется, если оформление не соответствует требованиям, критерии не выдержаны, защита менее 61 % контрольных вопросов.</p>
6.	Посещаемость		10	<p>10 баллов – студент посетил все 100% занятий</p> <p>7-9 баллов – студент посетил не менее 80% занятий</p> <p>4-6 баллов – студент посетил не менее 50% занятий</p> <p>1-3 балла – студент посетил не менее 25% занятий</p> <p>Если студент посетил менее 25% занятий, баллы не начисляются</p>
7.	Премияльные баллы		20	<p>Дополнительные премияльные баллы могут быть начислены:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- за проект, выполненный по заказу работодателя и реализованный на практике – 20 баллов;</li> <li>- постоянная активность во время практических занятий – 10 баллов;</li> <li>- полностью подготовленная к публикации статья по тематике в рамках дисциплины – 10 баллов;</li> <li>- участие с докладом во всероссийской олимпиаде по тематике изучаемой дисциплины – 20 баллов;</li> <li>- участие в выставке по тематике изучаемой дисциплины – 20 баллов;</li> <li>- публикация статьи по тематике изучаемой дисциплины в сборнике студенческих работ / материалах всероссийской конференции / журнале из перечня ВАК – 10 / 15 / 20</li> </ul>

8.	Ответ на экзамене	30	10-17 баллов – студент раскрыл основные вопросы и задания билета на оценку «удовлетворительно» 18-24 баллов – студент раскрыл основные вопросы и задания билета на оценку «хорошо», 25-30 баллов – студент раскрыл основные вопросы и задания билета на оценку «отлично».
9.	Индивидуальные задания, с помощью которых можно набрать дополнительные баллы	20	Провести анализ по одной статье из журналов по рекомендуемой литературы из рабочей программы соответствующей дисциплины с оценкой ее содержания (20 баллов) Прохождение тестирования (90 вопросов) по всему курсу дисциплины (10 баллов)
10.	Итого за семестр	100	

Итоговая оценка по экзамену выставляется в 100-балльной шкале и в традиционной четырехбалльной шкале. Перевод 100-балльной рейтинговой оценки по дисциплине в традиционную четырехбалльную осуществляется следующим образом:

100-балльная система	Традиционная система
85 - 100 баллов	Отлично
70 - 84 баллов	Хорошо
50 - 69 баллов	Удовлетворительно
Менее 50	Неудовлетворительно

#### 4.2 Типовые оценочные средства текущего контроля

##### **Вопросы для самоподготовки / Практическая работа**

Тема 1. Экстремальные задачи: история вопроса; основные понятия; принцип Лагранжа в теории экстремальных задач

##### **Вопросы и задания для самоконтроля**

1. Какие из перечисленных функций двух переменных, и при каких значениях параметров задают норму в  $\mathbb{R}^2$ ?
  - а)  $N(x) = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}}, p > 0$ ;
  - б)  $N(x) = |a_{11}x_1 + a_{12}x_2| + |a_{21}x_1 + a_{22}x_2|$ ;
  - в)  $N(x) = \max\{|a_{11}x_1 + a_{12}x_2|, |a_{21}x_1 + a_{22}x_2|\}$ .
2. Доказать, что нормы  $|x| = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$  и  $\|x\|_{\infty} = \max\{|x_1|, |x_2|\}$  эквивалентны.
3. Доказать, что все конечномерные нормированные пространства банаховы.
4. Построить пример нормированного, но не банахова пространства.
5. Привести пример двумерного подпространства  $C([0, 1])$ , единичным шаром которого является единичный круг.
6. Пусть  $X = \mathbb{R}^2$ . Найти норму пространства, сопряженного  $(X, \|\cdot\|)$ , если норма в  $X$  задается соотношениями:
  - а)  $N(x) = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$ ;
  - б)  $N(x) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ .
7. Привести пример ограниченного замкнутого множества, не являющегося компактом.
8. Исследовать отображения на дифференцируемость по Фреше и найти производные в случае дифференцируемости.
  - а)  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, f(x) = Ax, A$  – матрица размерности  $m \times n$ ;
  - б)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (x_1x_2, x_1^2 + x_2^2), \hat{x} = (1, 2)$ ;
  - в)  $f: H \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \langle a, x \rangle, a \in H$ , где  $H$  – гильбертово пространство;
  - г)  $f: H \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \langle x, x \rangle$ , где  $H$  – гильбертово пространство;
  - д)  $f: C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}, f(x(\cdot)) = x(0)$ ;
  - е)  $f: C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}, f(x(\cdot)) = e^{x(0)}$ .

## Тема 2. Элементы функционального анализа и дифференциального исчисления

### Вопросы и задания для самоконтроля

Решить гладкие конечномерные задачи на безусловный и условный экстремум:

- 1)  $x^2 - xy + y^2 - 2x + y \rightarrow \text{extr}$ ;
- 2)  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + x_1 - 2x_3 \rightarrow \text{extr}$ ;
- 3)  $4x + 3y \rightarrow \text{extr}, x^2 + y^2 = 1$ ;
- 4)  $e^{xy} \rightarrow \text{extr}, x + y = 1$ ;
- 5)  $xyz \rightarrow \text{extr}, x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$ ;
- 6)  $xyz \rightarrow \text{extr}, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ;
- 7)  $e^{x_1 - x_2} - x_1 - x_2 \rightarrow \text{extr}, x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ .

## Тема 3. Гладкие конечномерные задачи

1. Решить простейшую задачу ВИ (использовать условие 1-го порядка и определение)
2. Найти допустимые экстремали в задаче Больца
3. Найти допустимые экстремали в задаче со свободной границей.
4. Решить простейшую задачу ВИ (использовать необходимые и достаточные условия 1-го и 2-го порядка)
5. Решить векторную задачу

## Тема 4. Классическое вариационное исчисление

### Вопросы и задания для самоконтроля

- 1) Простейшая задача вариационного исчисления. Для своего варианта функционалов а), б), с) найти экстремали и построить их графики.

$$J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + 4y^2 - 8xy + 2x^2) dx, \quad y(-1)=3; \quad y(1)=1;$$

Вариант 1. а).

$$J(y) = \int_0^2 (y'^2 - 4y'e^{2x} + \sin^2 x) dx, \quad y(0)=1; \quad y(2)=-2;$$

б).

$$J(y) = \int_0^1 y \sqrt{1+y'^2} dx, \quad y(0)=2; \quad y(1)=3;$$

с).

- 2) Экстремаль функционала, зависящего от нескольких функций. Для своего варианта функционала найти экстремаль и построить её график.

$$J(y, z) = \int_0^1 (2y'z' - y^2 + z^2 - 2ye^x) dx, \quad y(0)=0; \quad z(0)=1; \\ y(1)=1; \quad z(1)=0;$$

Вариант 1.

- 3) Экстремаль функционала, зависящего от производных высших порядков. Для своего варианта функционала найти экстремаль и построить её график.

$$J(y) = \int_0^1 (y''^2 - 2y'^2 + y^2 - 2ye^x) dx, \quad y(0)=2; \quad y(1)=0; \\ y'(0)=1; \quad y'(1)=-1;$$

Вариант 1.

- 3) Задача вариационного исчисления с ограничениями. Изопериметрическая задача. Решить пример 2а при заданном изопериметрическом условии. Сравнить результат с решением примера 2а.

$$\int_0^1 y dx = 1$$

Вариант 1. \*

Задача вариационного исчисления с подвижными концами. Условия трансверсальности. Для функционала 2а найти экстремаль, при условии, что правый конец движется по заданной линии.

Вариант 1.  $\varphi(x) = e^x - 2;$

## Тема 5. Задача Лагранжа и оптимальное управление

### Вопросы и задания для самоконтроля

1. Решить задачи Лагранжа:

- 1)  $\int_0^1 u^2 dt \rightarrow \text{extr}, \ddot{x} - x = u, x(0) = 1;$
  - 2)  $\int_0^1 u^2 dt \rightarrow \text{extr}, \ddot{x} - x = u, x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0;$
  - 3)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 dt + x^2(0) \rightarrow \text{extr}, \ddot{x} + x = u, x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;$
  - 4)  $\int_0^1 (x^2 + u^2) dt \rightarrow \text{extr}, \dot{x} = x + u, x(1) = 1.$
2. Решить задачи оптимального управления:
- 1)  $\int_0^{\frac{7\pi}{4}} x \sin t dt \rightarrow \text{extr}, |\dot{x}| \leq 1, x(0) = 0;$
  - 2)  $\int_0^{T_0} (\dot{x}^2 + x) dt \rightarrow \text{extr}, |\dot{x}| \leq 1, x(0) = 0, x(T_0) = 0.$

## Тестирование

Тема 1. Экстремальные задачи: история вопроса; основные понятия; принцип Лагранжа в теории экстремальных задач

1. Управление это -

**А) достижение избранных целей в практической деятельности**

Б) достижение избранных целей в научной деятельности

В) достижение избранных целей в реальной действительности

Г) достижение избранных целей в теоретической деятельности

Д) достижение избранных целей в психологической деятельности

2. В теории управления возможна постановка скольких задач

А) 5

Б) 4

В) 3

Г) 2

Д) 1

3. Суть задачи управления заключается

А) в управлении объектом в процессе его функционирования без нашего непосредственного соучастия в процессе

**Б) в управлении объектом в процессе его функционирования с нашим непосредственным участием в процессе**

В) в управлении объектом в процессе его функционирования с помощью программы

Г) в управлении объектом в процессе его функционирования с помощью ЭВМ

Д) в управлении объектом в процессе его функционирования с помощью датчиков

4. Суть задачи самоуправления заключается

А) в управлении объектом в процессе его функционирования без нашего непосредственного соучастия в процессе

Б) в управлении объектом в процессе его функционирования с помощью датчиков

В) в управлении объектом в процессе его функционирования с помощью программы

Г) в управлении объектом в процессе его функционирования с помощью ЭВМ

**Д) все ответы верны**

5. На основании выбранного критерия оптимальности составляется

А) целевая функция

Б) зависимость параметров

**В) целевая функция, представляющая собой зависимость критерия оптимальности от параметров, влияющих на ее значение**

Г) зависимость параметров, влияющих на ее значение

Д) все ответы верны

6. При выборе формализованного (математического) выражения критерия оптимальности необходимо учитывать чтоб

А) критерий оптимальности отражал экономические показатели или величины с ними связанные

Б) для конкретной СУ учитывался только 1 критерий (если многокритериальная задача, то глобальный критерий- функция от частных критериев

В) критерий должен быть связан с управляющими воздействиями, иначе он бесполезен.

Г) информация, необходимая для критерия не должна быть избыточной.

**Д) все ответы верны**

7. Закон автоматического регулирования - это

А) уравнения регулятора, выражающее управляющее воздействие(выходную величину регулятора) через согласование

Б) уравнения регулятора, выражающее управляющее воздействие(выходную величину регулятора) через возмущение

**В) уравнения регулятора, выражающее управляющее воздействие(выходную величину регулятора) через рассогласование и возмущение (его входные величины)**

Г) уравнения регулятора, выражающее управляющее воздействие(выходную величину регулятора) через согласование и возмущение (его входные величины)

Д) все ответы неверны

8. Назовите типовые законы регулирования по отклонению

А) пропорциональный закон

Б) пропорционально - дифференциальный закон

В) интегральный закон

Г) пропорционально – интегральный закон

Д) все ответы верны

9. Назовите основные принципы построения САР.

А) регулирование по внешним возмущающим воздействиям

Б) регулирование по отклонению регулируемой величины от заданного значения

В) комбинированный

Г) все ответы верны

Д) все ответы неверны

10. Принцип адаптации применяется тогда,

А) когда параметры системы под влиянием внешних факторов изменяются непредвиденным заранее образом настолько сильно, что движение системы претерпевает существенные качественные изменения.

Б) когда параметры системы под влиянием факторов изменяются непредвиденным заранее образом настолько сильно, что движение системы претерпевает существенные качественные изменения

В) когда параметры системы под влиянием внутренних факторов изменяются непредвиденным заранее образом настолько сильно, что движение системы претерпевает существенные качественные изменения

Г) все ответы верны

Д) все ответы неверны

### Тема 3. Гладкие конечномерные задачи

1. Для решения задач оптимального управления применяются какие методы оптимизации:

А) Эйлера-Лагранжа

Б) динамического программирования Р. Беллмана

В) принцип максимума Л.С. Понтрягина.

Г) все ответы верны

Д) все ответы неверны

2. Как называется задача, где отсутствуют всякие ограничения?

А) задача на условный экстремум функционала

Б) задача на безусловный экстремум функционала

В) задача экстремум функционала

Г) задача на искусственный экстремум функционала

Д) задача на естественный экстремум функционала

3. В задаче на безусловный экстремум может быть задан функционал, зависящий:

А) от нескольких функций

Б) от их первых производных

В) от нескольких функций и их первых производных

Г) от функции

Д) от функции и производных высших порядков

4. Как называется задача, где задано произвольное число классических ограничений?

А) задача на условный экстремум функционала

Б) задача на безусловный экстремум функционала

В) задача экстремум функционала

Г) задача на искусственный экстремум функционала

Д) задача на естественный экстремум функционала

5. Какой метод используется для решения задач на безусловный экстремум?

А) метод Эйлера-Пуассона

Б) метод Эйлера-Лагранжа

В) метод Эйлера

Г) метод Лагранжа

Д) метод Риккати

6. Основой метода динамического программирования является:

А) принцип максимума Понтрягина

Б) принцип Р. Беллмана

В) принцип оптимальности

Г) ответ первый неверен

**Д) ответ второй и третий верен**

7. Необходимое условие оптимальности применяемое при расчете оптимальных процессов и систем является:

**А) принцип максимума Понтрягина**

Б) принцип Р. Беллмана

В) принцип оптимальности

Г) принцип экстремума

Д) все ответы верны

8. Критерием оптимальности системы управления называется:

А) качественная оценка оптимизируемого качества объекта

Б) объективная оценка оптимизируемого качества объекта

В) субъективная оценка оптимизируемого качества объекта

**Г) количественная оценка оптимизируемого качества объекта**

Д) рациональная оценка оптимизируемого качества объекта

9. Метод динамического программирования позволяет решать задачи скольких видов:

А) 5

Б) 4

**В) 3**

Г) 2

Д) 1

10. Метод динамического программирования позволяет решать какие задачи

А) дискретную,

Б) дискретно-непрерывную

В) непрерывную.

**Г) все ответы верны**

Д) все ответы неверны

#### Тема 5. Задача Лагранжа и оптимальное управление

1. Задача оптимального перехода из начального состояния в конечное представляет собой

А) краевую задачу, где начальные и конечные точки могут быть заданы одним из трех способов

Б) краевую задачу, где начальные и конечные точки могут быть заданы одним способом

**В) краевую задачу, где начальные и конечные точки могут быть заданы одним из четырех способов**

Г) краевую задачу, где начальные и конечные точки могут быть заданы одним из пяти способов

Д) краевую задачу, где начальные точки могут быть заданы одним из пяти способов

2. Для объекта множество начальных состояний может в общем случае совпадать

А) со всем множеством состояний

Б) с рабочей областью

В) со всем, множеством состояний либо с рабочей областью

**Г) все ответы верны**

Д) все ответы неверны

3. Множество конечных состояний является

А) подпространством множества состояний

Б) подпространством рабочей области

В) подпространством множества состояний или рабочей области

Г) все ответы неверны

**Д) все ответы верны**

4. Задача синтеза оптимального регулятора решается

**А) при условии ограничений на управление и ограниченном ресурсе**

Б) при условии ограничений на управление

В) при условии ограничений на ресурс

Г) все ответы неверны

Д) все ответы верны

5. Требования, предъявляемые к качеству работы замкнутой системы задаются в обобщенном виде, а именно в виде интегрального функционала, который носит название критерия оптимальности и имеет вид.

А)

Б)

В) ;

Г)

Д) ;

6. Какие методы используются для синтеза оптимальных систем в управлении?

А) классическое вариационное исчисление

Б) динамическое программирование

В) принцип максимума

Г) все ответы неверны

**Д) все ответы верны**

7. Вариационное исчисление целесообразно применять к задачам, в которых

А) области изменения  $y(t)$  и  $u(t)$  не содержат ограничений и являются непрерывными

Б) области изменения  $y(t)$  и  $u(t)$  содержат ограничений и являются непрерывными

**В) области изменения  $y(t)$  и  $u(t)$  не содержат ограничений и являются непрерывными, что имеет место при малых отклонениях величин  $y$  и  $u$  от установившихся состояний**

Г) области изменения  $y(t)$  и  $u(t)$  не содержат ограничений

Д) области изменения  $y(t)$  и  $u(t)$  не содержат ограничений и являются непрерывными, что имеет место при больших отклонениях величин  $y$  и  $u$  от установившихся состояний

8. Метод динамического программирования и принцип максимума применяются, когда

**А) области векторов  $y(t)$  и  $u(t)$  замкнутые, а коэффициенты векторов  $y(t)$  и  $u(t)$  могут быть кусочно-непрерывными функциями и находится на границах этих областей**

Б) области векторов  $y(t)$  и  $u(t)$  замкнутые

В) коэффициенты векторов  $y(t)$  и  $u(t)$  могут быть кусочно-непрерывными функциями и находится на границах этих областей

Г) коэффициенты векторов  $y(t)$  и  $u(t)$  могут быть кусочно-непрерывными функциями

Д) области векторов  $y(t)$  и  $u(t)$  не замкнутые

9. Фундаментальным понятием вариационного исчисления является

А) функционал  $\gamma$ , под которым понимают переменную величину, значение которой определяется выбором только одной функций.

**Б) функционал  $v$ , под которым понимают переменную величину, значение которой определяется выбором одной или нескольких функций**

В) функционал  $v$ , под которым понимают величину, значение которой определяется выбором одной или нескольких функций

Г) функционал  $v$ , под которым понимают постоянную величину, значение которой определяется выбором одной или нескольких функций

Д) функционал  $v$ , под которым понимают постоянную величину, значение которой определяется выбором одной функций

10. Функционалом  $v$  в вариационном исчислении может является

**А) длина кривой  $l$ , соединяющей две заданный точки  $A$  и  $B$ , расположенные на плоскости  $xOy$ , так как эта величина определяется выбором функции  $y(x)$ , описывающей кривую, проходящую через эти точки.**

Б) длина прямой  $l$ , соединяющей две заданный точки  $A$  и  $B$ , расположенные на плоскости  $xOy$ ,

В) длина прямой  $l$ , соединяющей две заданный точки  $A$  и  $B$ , расположенные на плоскости  $xOy$ , так как эта величина определяется выбором функции  $y(x)$ , описывающей прямую, проходящую через эти точки.

Г) длина кривой  $l$ , не соединяющей две заданный точки  $A$  и  $B$ , расположенные на плоскости  $xOy$ .

Д) нет правильного ответа

4.3 Промежуточная аттестация по дисциплине проводится в форме экзамена

### **Типовые вопросы экзамена (ПК-7)**

1. Общая постановка экстремальной задачи. Примеры экстремальных задач.

2. Основные разделы ТЭЗ. Исторические этапы становления ТЭЗ.

3. Основные понятия ТЭЗ, общая терминология: задачи на условный и безусловный экстремумы, целевые функционалы, допустимые точки (экстремали), локальные и глобальные экстремумы.

4. Основные принципы решения экстремальных задач, необходимые и достаточные условия экстремума. Принцип Лагранжа: сведение задач с ограничениями к задачам без ограничений.

5. Нормированные и банаховы пространства.

6. Производная по направлению, вариация по Лагранжу, производные по Гато и Фреше. Строгая дифференцируемость.

7. Производные высших порядков. Основные теоремы дифференциального исчисления в нормированных пространствах.

8. Конечномерные задачи без ограничений: постановка, правило решения, теорема Ферма. Условия второго порядка.

9. Гладкая конечномерная задача с ограничениями в виде равенств: постановка, правило решения. Необходимое условие экстремума первого порядка – принцип Лагранжа.

10. Гладкая конечномерная задача с ограничениями в виде равенств: необходимое и достаточное условия второго порядка.

11. Гладкая конечномерная задача с равенствами и неравенствами: постановка, правило решения. Необходимое условие первого порядка, необходимое и достаточное условия второго порядка.

Применение теоремы Вейерштрасса и следствия из нее.

12. Простейшая задача вариационного исчисления: постановка, правило решения, необходимое условие слабого экстремума первого порядка.

13. Леммы Лагранжа и Дюбуа-Реймона.

14. Уравнение Эйлера и его частные случаи.

15. Функционалы, зависящие от производных высших порядков, векторная задача.

16. Задача Больца: постановка, правило решения, необходимое условие слабого экстремума первого порядка.

17. Задачи с подвижными концами и границами: постановка, правило решения.

18. Изопериметрическая задача: постановка, правило решения, необходимое условие первого порядка.
19. Условия второго порядка в задачах вариационного исчисления: условия Лежандра и Якоби.
20. Сильные локальные экстремумы. Необходимые и достаточные условия сильного локального экстремума в простейшей задаче.
21. Задача Лагранжа: постановка, правило решения, необходимые условия экстремума.
22. Элементарная задача оптимального управления: постановка, правило решения, необходимое и достаточное условие.
23. Задача оптимального управления в форме Понтрягина: постановка, правило решения. Необходимые условия экстремума (принцип максимума Понтрягина).
24. Доказательство принципа максимума в задаче со свободным концом.
25. Необходимые условия минимума в вариационном исчислении и принцип максимума.

### Типовые задания для экзамена (ПК-7)

1. Какие методы используются для синтеза оптимальных систем в управлении?
  - А) классическое вариационное исчисление
  - Б) динамическое программирование
  - В) принцип максимума
  - Г) все ответы неверны
  - Д) все ответы верны
2. Вариационное исчисление целесообразно применять к задачам, в которых
  - А) области изменения  $y(t)$  и  $u(t)$  не содержат ограничений и являются непрерывными
  - Б) области изменения  $y(t)$  и  $u(t)$  содержат ограничений и являются непрерывными
  - В) области изменения  $y(t)$  и  $u(t)$  не содержат ограничений и являются непрерывными, что имеет место при малых отклонениях величин  $y$  и  $u$  от установившихся состояний
  - Г) области изменения  $y(t)$  и  $u(t)$  не содержат ограничений
  - Д) области изменения  $y(t)$  и  $u(t)$  не содержат ограничений и являются непрерывными, что имеет место при больших отклонениях величин  $y$  и  $u$  от установившихся состояний
3. Метод динамического программирования и принцип максимума применяются, когда
  - А) области векторов  $y(t)$  и  $u(t)$  замкнутые, а коэффициенты векторов  $y(t)$  и  $u(t)$  могут быть кусочно-непрерывными функциями и находится на границах этих областей
  - Б) области векторов  $y(t)$  и  $u(t)$  замкнутые
  - В) коэффициенты векторов  $y(t)$  и  $u(t)$  могут быть кусочно-непрерывными функциями и находится на границах этих областей
  - Г) коэффициенты векторов  $y(t)$  и  $u(t)$  могут быть кусочно-непрерывными функциями
  - Д) области векторов  $y(t)$  и  $u(t)$  не замкнутые
4. Фундаментальным понятием вариационного исчисления является
  - А) функционал  $v$ , под которым понимают переменную величину, значение которой определяется выбором только одной функций.
  - Б) функционал  $v$ , под которым понимают переменную величину, значение которой определяется выбором одной или нескольких функций
  - В) функционал  $v$ , под которым понимают величину, значение которой определяется выбором одной или нескольких функций
  - Г) функционал  $v$ , под которым понимают постоянную величину, значение которой определяется выбором одной или нескольких функций
  - Д) функционал  $v$ , под которым понимают постоянную величину, значение которой определяется выбором одной функций
5. Функционалом  $v$  в вариационном исчислении может являться
  - А) длина кривой  $l$ , соединяющей две заданные точки  $A$  и  $B$ , расположенные на

плоскости  $xOy$ , так как эта величина определяется выбором функции  $y(x)$ , описывающей кривую, проходящую через эти точки.

Б) длина прямой  $l$ , соединяющей две заданные точки  $A$  и  $B$ , расположенные на плоскости  $xOy$ ,

В) длина прямой  $l$ , соединяющей две заданные точки  $A$  и  $B$ , расположенные на плоскости  $xOy$ , так как эта величина определяется выбором функции  $y(x)$ , описывающей прямую, проходящую через эти точки.

Г) длина кривой  $l$ , не соединяющей две заданные точки  $A$  и  $B$ , расположенные на плоскости  $xOy$ .

Д) нет правильного ответа

#### 4.4. Шкала оценивания промежуточной аттестации

Оценка	Компетенции	Дескрипторы (уровни) – основные признаки освоения (показатели достижения результата)
«отлично» (85 - 100 баллов)	ПК-7	Отлично понимает, совершенствует и применяет современный математический аппарат
«хорошо» (70 - 84 баллов)	ПК-7	Хорошо понимает, совершенствует и применяет современный математический аппарат
«удовлетворительно» (50 - 69 баллов)	ПК-7	Удовлетворительно понимает, совершенствует и применяет современный математический аппарат
«неудовлетворительно» (менее 50 баллов)	ПК-7	Неудовлетворительно понимает, совершенствует и применяет современный математический аппарат

### 5. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

#### 5.1 Методические указания по организации самостоятельной работы обучающихся:

Приступая к изучению дисциплины, в первую очередь обучающимся необходимо ознакомиться содержанием рабочей программы дисциплины (РПД), которая определяет содержание, объем, а также порядок изучения и преподавания учебной дисциплины, ее раздела, части.

Для самостоятельной работы важное значение имеют разделы «Объем и содержание дисциплины», «Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины» и «Материально-техническое обеспечение дисциплины, программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы».

В разделе «Объем и содержание дисциплины» указываются все разделы и темы изучаемой дисциплины, а также виды занятий и планируемый объем в академических часах.

В разделе «Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины» указана рекомендуемая основная и дополнительная литература.

В разделе «Материально-техническое обеспечение дисциплины, программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы» содержится перечень профессиональных баз данных и информационных справочных систем, необходимых для освоения дисциплины.

#### 5.2 Рекомендации обучающимся по работе с теоретическими материалами по дисциплине

При изучении и проработке теоретического материала необходимо:

- просмотреть еще раз презентацию лекции в системе MOODLe, повторить законспектированный на лекционном занятии материал и дополнить его с учетом рекомендованной дополнительной литературы;
- при самостоятельном изучении теоретической темы сделать конспект, используя рекомендованные в РПД источники, профессиональные базы данных и информационные справочные системы;
- ответить на вопросы для самостоятельной работы, по теме представленные в пункте 3.2 РПД.
- при подготовке к текущему контролю использовать материалы фонда оценочных средств (ФОС).

#### 5.3 Рекомендации по работе с научной и учебной литературой

Работа с основной и дополнительной литературой является главной формой самостоятельной работы и необходима при подготовке к устному опросу на семинарских занятиях, к дебатам, тестированию, экзамену. Она включает проработку лекционного материала и рекомендованных источников и литературы по тематике лекций.

Конспект лекции должен содержать реферативную запись основных вопросов лекции, в том числе с опорой на размещенные в системе MOODLe презентации, основных источников и литературы по темам, выводы по каждому вопросу. Конспект может быть выполнен в рамках распечатки выдачи презентаций лекций или в отдельной тетради по предмету. Он должен быть аккуратным, хорошо читаемым, не содержать не относящуюся к теме информацию или рисунки.

Конспекты научной литературы при самостоятельной подготовке к занятиям должны содержать ответы на каждый поставленный в теме вопрос, иметь ссылку на источник информации с обязательным указанием автора, названия и года издания используемой научной литературы. Конспект может быть опорным (содержать лишь основные ключевые позиции), но при этом позволяющим дать полный ответ по вопросу, может быть подробным. Объем конспекта определяется самим студентом.

В процессе работы с основной и дополнительной литературой студент может:

- делать записи по ходу чтения в виде простого или развернутого плана (создавать перечень основных вопросов, рассмотренных в источнике);
- составлять тезисы (цитирование наиболее важных мест статьи или монографии, короткое изложение основных мыслей автора);
- готовить аннотации (краткое обобщение основных вопросов работы);
- создавать конспекты (развернутые тезисы).

#### 5.4. Рекомендации по подготовке к отдельным заданиям текущего контроля

Собеседование предполагает организацию беседы преподавателя со студентами по вопросам практического занятия с целью более обстоятельного выявления их знаний по определенному разделу, теме, проблеме и т.п. Все члены группы могут участвовать в обсуждении, добавлять информацию, дискутировать, задавать вопросы и т.д.

Устный опрос может применяться в различных формах: фронтальный, индивидуальный, комбинированный. Основные качества устного ответа подлежащего оценке:

- правильность ответа по содержанию;
- полнота и глубина ответа;
- сознательность ответа;
- логика изложения материала;
- рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи;
- своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе;
- использование дополнительного материала;
- рациональность использования времени, отведенного на задание.

Устный опрос может сопровождаться презентацией, которая подготавливается по одному из вопросов практического занятия. При выступлении с презентацией необходимо обращать внимание на такие моменты как:

- содержание презентации: актуальность темы, полнота ее раскрытия, смысловое содержание, соответствие заявленной темы содержанию, соответствие методическим требованиям (цели, ссылки на ресурсы, соответствие содержания и литературы), практическая направленность, соответствие содержания заявленной форме, адекватность использования технических средств учебным задачам, последовательность и логичность презентуемого материала;
- оформление презентации: объем (оптимальное количество), дизайн (читаемость, наличие и соответствие графики и анимации, звуковое оформление, структурирование информации, соответствие заявленным требованиям), оригинальность оформления, эстетика, использование возможности программной среды, соответствие стандартам оформления;
- личностные качества: ораторские способности, соблюдение регламента, эмоциональность, умение ответить на вопросы, систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам программы;

- содержание выступления: логичность изложения материала, раскрытие темы, доступность изложения, эффективность применения средств ИКТ, способы и условия достижения результативности и эффективности для выполнения задач своей профессиональной или учебной деятельности, доказательность принимаемых решений, умение аргументировать свои заключения, выводы.

## **6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

### **6.1 Основная литература:**

1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление : Учебник. - 5-е изд.. - М.: Едиториал УРСС, 2002. - 319 с.
2. Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи : учебное пособие. - 3-е изд., испр.. - Москва: Физматлит, 2011. - 408 с. - Текст : электронный // ЭБС «Университетская библиотека онлайн» [сайт]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=67227>
3. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление : Задачи и примеры с подробными решениями : Учеб. пособие. - 2-е изд., испр.. - М.: Едиториал УРСС, 2002. - 166 с.

### **6.2 Дополнительная литература:**

1. Бренерман М. Х., Жихарев В. А. Вариационное исчисление : учебное пособие. - Казань: Казанский научно-исследовательский технологический университет (КНИТУ), 2017. - 148 с. - Текст : электронный // ЭБС «Университетская библиотека онлайн» [сайт]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=500496>
2. Бренерман, М. Х., Жихарев, В. А. Вариационное исчисление : учебное пособие. - 2022-01-18; Вариационное исчисление. - Казань: Казанский национальный исследовательский технологический университет, 2017. - 148 с. - Текст : электронный // IPR BOOKS [сайт]. - URL: <http://www.iprbookshop.ru/79275.html>
3. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. - Москва: б.и., 1961. - 226 с. - Текст : электронный // ЭБС «Университетская библиотека онлайн» [сайт]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=455166>

### **6.3 Иные источники:**

1. Журнал «Вычислительные методы и программирование. Новые вычислительные технологии» - <http://www.maik.ru/ru/journal/vychmat/>
2. Журнал «Журнал вычислительной математики и математической физики» - <http://www.maik.ru/ru/journal/vychmat/>
3. «Журнал математической физики, анализа, геометрии» - <https://vestnik.susu.ru/cmi>
4. Журнал «Успехи математических наук» - [http://www.mathnet.ru/php/journal.phtml?jrnid=tmf&option\\_lang=rus](http://www.mathnet.ru/php/journal.phtml?jrnid=tmf&option_lang=rus)

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины, программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы**

Для проведения занятий по дисциплине необходимо следующее материально-техническое обеспечение: учебные аудитории для проведения занятий лекционного и семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, помещения для самостоятельной работы.

Учебные аудитории и помещения для самостоятельной работы укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы укомплектованы компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Для проведения занятий лекционного типа используются наборы демонстрационного оборудования, обеспечивающие тематические иллюстрации (проектор, ноутбук, экран/ интерактивная доска).

Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

Операционная система "Альт Образование"

LibreOffice

Microsoft Windows 10

Microsoft Office Профессиональный плюс 2007

Профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

1. Электронный каталог Фундаментальной библиотеки ТГУ. – URL: <http://biblio.tsutmb.ru/elektronnyij-katalog>
2. Университетская библиотека онлайн: электронно-библиотечная система. – URL: <https://biblioclub.ru>
3. Консультант студента. Гуманитарные науки: электронно-библиотечная система. – URL: <https://www.studentlibrary.ru>
4. Научная электронная библиотека eLIBRARY.ru. – URL: <https://elibrary.ru>
5. Российская государственная библиотека. – URL: <https://www.rsl.ru>
6. Российская национальная библиотека. – URL: <http://nlr.ru>
7. Президентская библиотека имени Б.Н. Ельцина. – URL: <https://www.prlib.ru>
8. Научная электронная библиотека Российской академии естествознания. – URL: <https://www.monographies.ru>
9. Электронная библиотека РФФИ. – URL: <https://www.rfbr.ru/rffi/ru/library>

### **Электронная информационно-образовательная среда**

[https://auth.tsutmb.ru/authorize?response\\_type=code&client\\_id=moodle&state=xyz](https://auth.tsutmb.ru/authorize?response_type=code&client_id=moodle&state=xyz)

Взаимодействие преподавателя и студента в процессе обучения осуществляется посредством мультимедийных, гипертекстовых, сетевых, телекоммуникационных технологий, используемых в электронной информационно-образовательной среде университета.